IMAGINARY – Tricks zum Programm SURFER

"Gibt es irgendwelche Tricks, wie man der Formel ansehen kann, was hinterher für eine Fläche rauskommt?"

Eine sehr berechtigte Frage.

Die meisten Nutzer des Surfer werden so vorgehen, dass sie eine bekannte Formel, sagen wir f(x,y,z), für eine Fläche nehmen und diese durch Drehen und durch Ausschneiden mit dem senkrechten Schieber in eine schöne Form bringen. Verwendet man in der Formel die Buchstaben a,b,c oder d, so kann man mit den waagerechten Schiebern diese Parameter und damit die Fläche sehr einfach verändern.

Beispiele:

1. z=0 ist die Gleichung für die (x,y)-Ebene, d.h. die Fläche der Punkte mit den Koordinaten x,y,z für die z=0 ist. Hier ist f(x,y,z) also einfach z.

2. x^2+y^2=1 ist die Gleichung für den Kreis vom Radius 1 in der (x,y)-Ebene. Da sich aber alles im 3-dimensionalen Raum mit den Koordinaten x,y,z abspielt, kann z alles sein. Man erhält also für jedes z einen Kreis vom Radius 1 und alles zusammen ergibt einen Zylinder vom Radius 1 (oder Rohr vom Durchmesser 2). Die Formel für das Rohr lautet damit x^2+y^2-1.

3. Wenn mann den Durchmesser verändern will, wählt man im Surfer z. B. den Parameter a, und die Formel x^2+y^2-a^2 liefert den Zylinder vom Radius a. (Wenn man das Bild z. B. so dreht, dass die z-Achse senkrecht nach hinten zeigt, dann sieht man vom Zylinder nur den Kreis).

4. x^2+y^2+z^2-a^2 ist die Formel für die Kugeloberfläche vom Radius a, die Formel x^2+b*y^2+z^2-a^2 beschreibt ein Ellipsoid (oder ein Ei), wenn b nicht 1 ist, und x^2-b*y^2+z^2-a^2 beschreibt ein Hyperboloid. Man beachte, das der Surfer alle Bilder innerhalb einer unsichtbaren Kugel zeigt, deren Größe durch den senkrechten Schieber geregelt wird. Verändert man diesen Schieber, so wird z. B. aus dem Ei ein Serviettenring (wenn die Umgebungskugel das Ei schneidet), und plötzlich ist nichts mehr zu sehen (wenn die Umgebungskugel im Ei verschwindet).

Zusätzlich gibt es drei wichtige Regeln:

A. Mehrere Flächen:
Multipliziert man zwei Formeln f und g, so erhält man durch f*g=0 die Vereinigung der beiden Flächen f=0 und g=0. (Die neue Fläche ist längs der Schnittkurve f=g=0 singulär). Z. B. ist x*(x^2+y^2+z^2-1)=0 die Vereinigung der Ebene mit der Kugel, und das sieht (innerhalb der Umgebungskugel) wie Saturn mit einem Ring aus.

In dem neuen Surfer kann man die Flächen einzeln erzeugen und vereinigen. Das erniedrigt die Berechnungskomplexität und erlaubt variantenreichere Färbungen. Bei der Verschmelzung von Komponenten (siehe B) braucht man aber das Produkt.

B. Verschmelzung von Komponenten:
Subtrahiert man von einer Formel f eine Konstante, sagen wir a, so wird durch f(x,y,z)-a=0, die Fläche f(x,y,z)=0 gestört, insbesondere werden die Singularitäten von f(x,y,z)=0 geglättet.

Stört man z.B. die Vereinigung zweier Flächen, die als Produkt f*g gegeben ist, durch f*g-a, so wird die Fläche längs der Schnittkurve geglättet, und die beiden Komponenten f=0 und g=0 verschmelzen zu einer Komponente.

Man kann diesen Glättungsprozess sehr schön beobachten, wenn man bei x*(x^2+y^2+z^2-1)-a den Parameter a von 0 ausgehend langsam vergrößert.

C. Schnittkurven:
Sind f=0 und g=0 die Formeln zweier Flächen, so ist f^2+g^2=0 die Formel für die Schnittkurve, da diese Gleichung in den reellen Zahlen mit f=g=0 gleichbedeutend ist. Die Schnittkurve wird man aber so nicht sehen, da sie eindimensional ist und die Visualisierungs-Software sie nicht sieht.

Der Trick ist, daß man durch f^2+g^2-a, mit kleinem Wert für a, die Schnittkurve verdickt und sie so sichtbar macht.

Aus diesen drei Prinzipien kann man schon ohne weiteres Wissen sehr viele schöne Flächen kreieren. Je mehr Grundbausteine (neben Ebene, Kugel, Ellipsoid, etc.) man kennt oder sich überlegt, desto kompliziertere Flächen kann man natürlich basteln.

Tipps von Prof. Gert-Martin Greuel, Direktor des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach und Leiter der Ausstellung IMAGINARY.