Einblicke in die Mathematik

Begleitheft zur Mathematik-Ausstellung

Mit Links zum Download der Programme

www.mima.museum

Willkommen im MiMa!

Im mathematischen Teil der Ausstellung ist Anfassen ausdrücklich erwünscht! Entdecken Sie mathematische Zusammenhänge, indem Sie mit den Exponaten experimentieren.

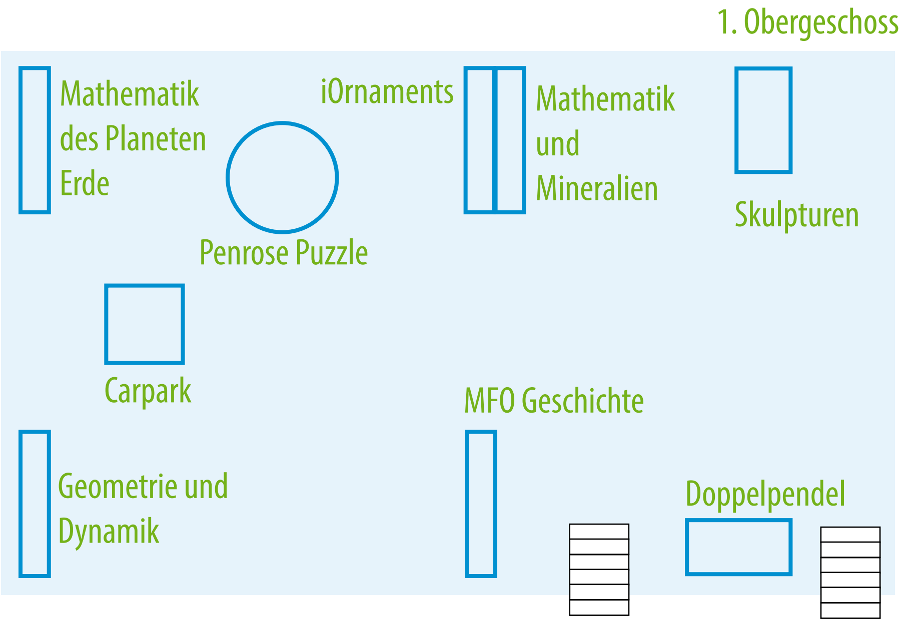
Erstellen Sie zum Beispiel Ornamente, entwerfen Sie gekrümmte Flächen im Raum, erzeugen Sie virtuell eigene Kristallformen oder fliegen Sie durch ein unendlich großes virtuelles Kristallgitter. Die Symmetrie, eine mathematische Grundeigenschaft von Kristallen, werden Sie in vielen Exponaten wiederfinden. Wir zeigen Ihnen Objekte mit zweidimensionalen, dreidimensionalen und sogar vierdimensionalen Symmetrien. Außerdem werden Sie Bilder aus verschiedensten Bereichen der Mathematik sehen, von der algebraischen Geometrie und Differentialgeometrie bis hin zu dynamischen Systemen und Quasikristallen.

Informationen zu allen mathematischen Exponaten, den Programmen, den wissenschaftlichen Ideen und mathematischen Fachgebieten finden Sie in diesem Heft zum Nachlesen.

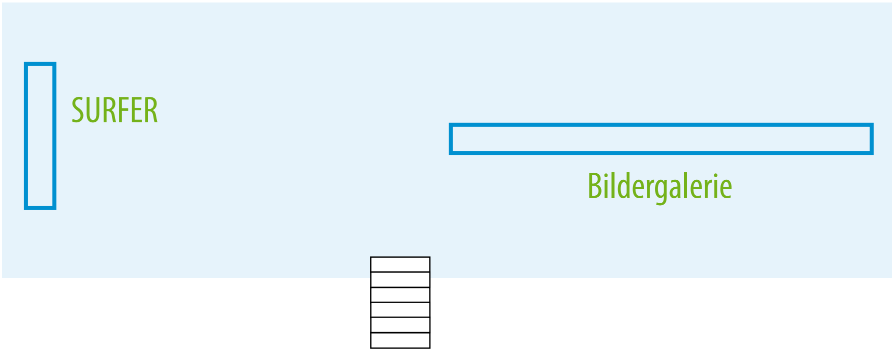
Die Exponate wurden von Mathematikerinnen und Mathematikern aus der ganzen Welt entwickelt. Viele Programme, die Sie im Museum finden, können Sie auch zu Hause verwenden. Entsprechende Hinweise und Links finden Sie in diesem Heft. Weitere Informationen zum Museum, den Veranstaltungen und Sonderausstellungen finden Sie auf unserer Webseite www.mima.museum.

Viel Spaß auf Ihrer Entdeckungsreise durch die Wunderwelt der Mineralien und der Mathematik!

Überblick


1. Obergeschoss
Mathematik des Planeten Erde
iOrnaments
Mathematik und Mineralien
Skulpturen
Penrose Puzzle
Carpark
MFO Geschichte
Geometrie und Dynamik
Doppelpendel

Galerie



1 MFO Geschichte

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO), eines der bekanntesten internationalen Forschungszentren für Mathematik, ist verantwortlich für den mathematischen Teil der Ausstellung im MiMa. Informationen zur Geschichte des Instituts und historische Bilder der letzten 60 Jahre finden Sie an dieser Station.

Das Institut wurde 1944 gegründet und ist seit 2005 Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft. Pro Jahr besuchen fast 3000 Forscherinnen und Forscher aus der ganzen Welt das Institut, um gemeinsam an wissenschaftlichen Fragen der Mathematik zu arbeiten.

Im Jahr der Mathematik 2008 entwickelte das MFO in enger Zusammenarbeit mit internationalen Mathematikerinnen und Mathematikern die Wanderausstellung IMAGINARY. Mit dieser Ausstellung war das Ziel verbunden, der Öffentlichkeit mathematische Hintergründe zugänglich zu machen und auf interaktive Weise zu erklären. Die Ausstellung war inzwischen in zahlreichen Städten weltweit zu sehen. Für das MiMa wurden Teile der Ausstellung übernommen und mit dem Schwerpunkt auf Verbindungen zur Kristallographie erweitert und angepasst.

Das Projekt IMAGINARY wurde inzwischen zu einer Open-Source-Plattform weiter entwickelt, auf der alle Interessierte mathematische Inhalte beitragen und herunterladen können. Seit 2016 ist IMAGINARY ein eigenständiges Unternehmen.

Für weitere Nachforschungen:

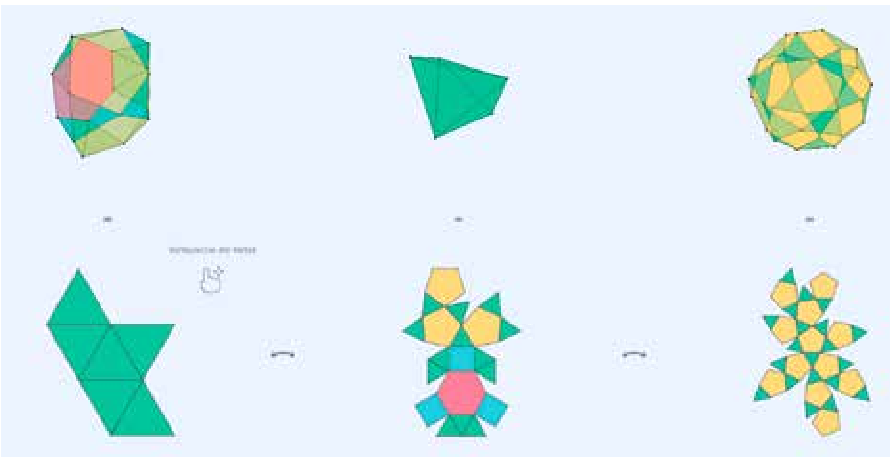
www.mfo.de
www.imaginary.org

2 Geometrie und Dynamik

Diese Station zeigt eine Auswahl von Programmen zu Geometrie und Dynamik. In den einzelnen Experimenten kann man geometrische Objekte verändern, Zusammenhänge zwischen Musik und Geometrie erleben oder auch einzelne mathematische Simulationen betrachten und verändern.

2a Match the Net

Erinnern Sie sich noch, wie man einen Würfel aus einem Blatt Papier bastelt? Wie sieht ein Würfel aus, wenn er aufgefaltet wird? Beim Spiel „Match the Net" geht es genau um diese Zuordnung von dreidimensionalen Formen zu ihren enstprechenden aufgefalteten Polytopen. Allerdings sind die Formen deutlich komplizierter als ein Würfel und so wird das Spiel schnell zu einem kniffligen und spannenden Rätsel.



Aktivitäten

Alleine oder auch gemeinsam macht das Lösen der kniffligen Aufgaben Spaß. Auf der Startseite können Sprache, Schwierigkeitsgrad und die Anzahl an Polytopen gewählt werden. Mit einem Klick auf „Spiel starten" geht es los. In der unteren Hälfte erscheinen flache Auffaltungen von Polytopen, die ihren dreidimensionalen Entsprechungen in der oberen Hälfte des Bildschirms zugeordnet werden müssen. Die Auffaltungen lassen sich bewegen und vertauschen, indem man sie einfach übereinander zieht. Mit „Absenden" kann man das Ergebnis überprüfen. Jedes Spiel hat mehrere Runden. Am Ende werden die Punkte zusammengezählt. Aber aufgepasst: Auch die Zeit spielt eine Rolle!

Die Mathematik dahinter

Polytope, Polygone, Polyeder – damit beschäftigen sich die Geometer unter den Mathematikerinnen und Mathematikern. Polytope sind geometrische Objekte mit „flachen" Seiten. Zweidimensionale Polytope heißen Polygone. Das sind ebene Gebilde, die zwar viele Ränder besitzen und schief und krumm sein können, deren Gesamtlinien aber immer gerade und geschlossen sind. Einfache Beispiele für Polygone sind Dreiecke oder Vierecke. Dreidimensionale Polytope heißen Polyeder. Dazu gehören etwa Prismen, Quader oder auch Würfel. Die Seitenflächen von Polyedern setzen sich aus Polygonen zusammen. Zum Beispiel kann eine Pyramide aus einem Viereck und vier Dreiecken bestehen.

Es ist eine offene Frage der Mathematik, ob jedes Polyeder sich in ein planares Netz auffalten lässt. Natürlich greifen die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler bei der Lösung der Frage nicht nach Schere und Papier. Sie arbeiten mit Computerprogrammen wie „polymake", die Polytope generieren und auffalten. Diese helfen auch die größtmögliche Anzahl an Netzen für ein Polytop zu finden. Denn oft gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, um ein Polytop aufzufalten.

Innerhalb der Polyeder kommen spezielle Gruppen vor, wie etwa die platonischen Körper. Diese sind nicht nur im Spiel zu entdecken, sondern in der weiteren Ausstellung auch als Skulpturen zu sehen.

Danksagung

Idee und Entwicklung: Michael Joswig, Georg Loho, Benjamin Lorenz, Rico Raber und das polymake-Team (www.polymake.org/doku.php/team).

Für weitere Nachforschungen

https://www.matchthenet.de/
https://imaginary.org/de/node/1168

2b FrozenLight

Dieses Spiel verbindet Kunst, Mathematik und Kryptographie. Ein Lichtstrahl wird durch ein Raster aus runden Spiegeln gelenkt und nach den Regeln der Strahlenoptik gebrochen. Dabei ist die Positionierung der Lichtquelle ausschlaggebend für die Kreation von Chaos oder Symmetrie.

Aktivitäten

Mit den vielen verschiedenen Knöpfen auf dem Anfangsbildschirm lassen sich unterschiedliche Reflektionsmuster auswählen. Die oberste Reihe der Knöpfe steht für die Größe des

Rasters, 5 x 5 erzeugt ein Raster von 5 mal 5 Spiegeln. Die Prozentzahl in der unteren Reihe zeigt den maximalen Radius der Spiegel an, für den das voreingestellte Muster funktioniert. Bewegen Sie mit dem Finger das Raster oder ziehen Sie die Lichtquelle in andere Positionen und beobachten Sie die Veränderung des Musters.

Einige Knöpfe sind anders: Mit dem ?-Knopf oben links kann man den für das symmetrische Muster verantwortlichen Teil des Lichtstrahls anzeigen. Mit dem Prozentzahl-Knopf oben rechts können Sie für jedes Muster den Radius der „Spiegel" verändern. In der unteren linken Ecke des Bildschirms finden Sie ein Symbol, um die Farben anzupassen. Betätigen Sie den Knopf in der unteren rechten Ecke, erscheint eine Animation, die verschiedene symmetrische Muster hintereinander abspielen lässt.

Die Mathematik dahinter

Die Software berechnet alle Reflektionen nach den Gesetzen der geometrischen Optik (auch Strahlenoptik). Die Grundannahme ist, dass sich das Licht als Strahl ausbreitet. So kann man die Strahlen als Geraden ansehen und die Regeln der Geometrie anwenden, wie etwa das Fermat'sche Prinzip, nach dem das Licht immer den schnellsten, aber nicht unbedingt den kürzesten Weg wählt. Das Modell erscheint zwar simpel, aber durch eigenes Ausprobieren erfährt man bald, dass kleinste Veränderungen an der Position der Lichtquelle großes Chaos verursachen. Die Software führt dabei Berechnungen in Langzahl-Arithmetik durch. Das sind Kalkulationen mit einer sehr hohen Zahl an Nachkommastellen, die in dieser Geschwindigkeit nur ein Computer leisten kann und die im Gegenzug durch die Leistung des Computers begrenzt werden. Auch kryptographische Verschlüsselungen sind mit diesem

Programm möglich. Textnachrichten können etwa als Reflektionsmuster programmiert und nur mit einem speziellen Symbolschlüssel entziffert werden.

Danksagung

FroZenLight wurde von Zoltan Palmer entwickelt.

Für weitere Nachforschungen

www.imaginary.org/de/node/513

2c Qi

Qi ist ein Programm zur interaktiven Visualisierung von mathematischen Flächen aus dem Gebiet der Differentialgeometrie.

Aktivitäten

Mit den Knöpfen am linken Rand können Sie verschiedene Flächen auswählen. Mit dem „i"-Knopf rechts oben blenden Sie eine kurze Beschreibung zur jeweiligen Fläche ein. Die anderen Knöpfe in der rechten Menüleiste dienen dazu, Eigenschaften der einzelnen Flächen zu verändern, wie z.B. die Textur oder die Farbe. Mit dem Knopf S^3 schalten Sie zwischen der so genannten Möbiustransformation und dem klassischen Drehen der Fläche um. Mit dem Finger können Sie die Fläche dann direkt in der Mitte drehen.

Die Mathematik dahinter

Die Differentialgeometrie beschäftigt sich mit der Krümmung von Formen. Es geht darum, die Eigenschaften von Kurven, gekrümmten Oberflächen oder sogar Formen mit mehr als drei

Dimensionen mathematisch präzise zu beschreiben. Zu den Anwendungsfeldern der Differentialgeometrie gehören zum Beispiel die Kartographie, die Hydro- und Aerodynamik, die Berechnung von Flugbahnen, technische Verfahren zur plastischen Verformung, aber auch die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein.

Besonders interessant sind Flächen, die in dem Sinne optimal sind, dass ein genau festgelegtes „Qualitätsmaß" nicht verbessert werden kann, wenn man kleine Änderungen an der Fläche vornimmt. Dazu gehören beispielsweise Minimalflächen. Minimalflächen haben die gleichen Eigenschaften wie Seifenhäute. Eine Seifenhaut, die man durch Eintauchen eines gebogenen Drahtes in Seifenlösung erhält, hat die kleinste Oberfläche unter allen möglichen Flächen, die man in den Draht einspannen kann. Ihre sogenannte „mittlere Krümmung" an jedem Flächenpunkt ist Null. Seit den sechziger Jahren werden Minimalflächen als Modelle für leichte Dachkonstruktionen herangezogen, zum Beispiel für das Dach des Münchner Olympiastadions.

Danksagung

Qi wurde von der GeometrieWerkstatt des Mathematischen Instituts der Universität Tübingen unter Mitwirkung von Nicholas Schmitt und Ulf Wagner entwickelt.

Für weitere Nachforschungen

www.imaginary.org/de/node/515

2d Math to Touch

Math to Touch ist eine Sammlung von 11 Anwendungen, die auf spielerische und visuell ansprechende Weise Zugang zur Mathematik bietet. Sie sind über die unteren beiden Reihen im Menü der Station aufrufbar. Lassen Sie den Zufall neue Mozart-Sonaten komponieren oder entdecken und verändern Sie das Schwarmverhalten von Fischen!

Aktivitäten

Jedes Programm hat ein anderes, intuitives Interaktionsdesign: Achten Sie auf Beschreibungstexte, einzelne Knöpfe, oder auch Punkte, die man mit dem Finger bewegen kann. Mit dem Pfeil in der linken unteren Ecke gelangen Sie immer wieder in das Hauptmenü zurück.

Danksagung

Alle Anwendungen sind von Jürgen Richter-Gebert, Technische Universität München, entwickelt worden.

Für weitere Nachforschungen

www.science-to-touch.com

3 Carpark

Carpark ist ein spannendes Logikspiel. Die Aufgabe ist es, das rote Cabrio aus einem Parkstau zu befreien, indem Sie die Autos nur vorwärts und rückwärts verschieben, aber nicht heben oder seitwärts verstellen.

Aktivitäten

Über dem Spielbrett finden Sie Karten mit verschiedenen Ausgangssituationen. Sie sind nach Schwierigkeitstufen sortiert. Suchen Sie sich eine aus, bauen Sie die Ausgangssituation nach und versuchen Sie dann, das rote Auto auszuparken.

Die Mathematik dahinter

Mathematikerinnen und Mathematiker knobeln auch gern. Aber sie beginnen sofort sich zu fragen, woran man erkennen kann, ob so ein Problem lösbar ist und in wie vielen Schritten. Man kann das Spiel mathematisch modellieren und die möglichen Lösungswege finden, zum Beispiel die Lösung mit den wenigsten Verschiebungen. Solche Fragen werden in der Optimierung, der Kombinatorik und der Spieltheorie betrachtet, die viele Anwendungen in Technik und Wirtschaft haben.

Wenn Sie zu Hause weiterknobeln möchten, fragen Sie in unserem Museumsshop nach dem Spiel „Rush Hour".

Danksagung

Das Exponat wurde von der Schreinerei Brosemer in Zell am Harmersbach für das MiMa gebaut.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-carpark

4 Mathematik des Planeten Erde

Die „Mathematik des Planeten Erde" (MPE) ist ein internationales Projekt, in dem durch Wettbewerbe interaktive Exponate erstellt werden. Interessierte sind aufgerufen, ihre Entwürfe für Exponate, die die Bedeutung der Mathematik für die Lösung globaler Probleme anschaulich darstellen, einzureichen. Neben IMAGINARY sind die UNESCO, die International Mathematical Union und die International Commission on Mathematical Instruction Organisatoren und Partner des Wettbewerbs. Eine Auswahl der besten interaktiven Anwendungen zeigt diese Station.

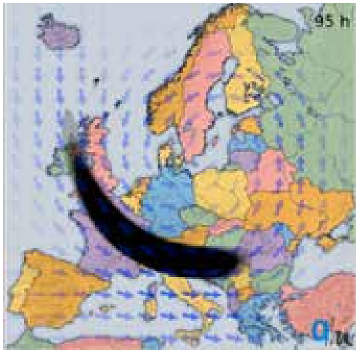
4a Dune Ash

Im Mai 2011 brach der Vulkan Grimsvötn auf Island aus. Die entstandene Aschewolke verursachte die Schließung des Luftraums in Skandinavien und Schottland und beeinträchtigte den Luftraum in ganz Europa. Das Programm Dune Ash simuliert, wie sich eine solche Aschewolke ausbreitet. Sie können den Standort des Vulkans und die Windverhältnisse vorgeben und anschließend beobachten, wie sich die Asche vom Moment des Ausbruchs an über Europa verteilt.

Aktivitäten

Rufen Sie das Programm „Dune Ash" auf. Positionieren Sie einen Vulkan irgendwo in Europa, indem Sie auf die entsprechende Stelle des Bildschirms tippen. Bewegen Sie sich dann mit dem Pfeilknopf durch die weiteren Schritte.

Skizzieren Sie als nächstes ein Windfeld, indem Sie auf dem Bildschirm Linien einzeichnen. Die Windgeschwindigkeit ergibt sich aus der „Malgeschwindigkeit”. Basierend auf den gezeichneten Linien wird ein Windfeld über ganz Europa berechnet und angezeigt. Die blauen Pfeile vermitteln einen Eindruck der Windgeschwindigkeiten: Eine helle Färbung steht für niedrige Geschwindigkeit, eine dunkle Färbung für hohe Geschwindigkeit. Für die Dauer der Simulation bleibt das Windfeld konstant. In der Realität könnten sich die Winde durchaus ändern.



Die Verteilung der Asche wird zusätzlich durch eine Diffusionskonstante bestimmt. Sie beruht auf zufälligen Bewegungen der Ascheteilchen aufgrund ihrer thermischen Energie. Wie stark der Einfluss der Diffusion in der Simulation sein soll, legen Sie im nächsten Schritt über einen Schieberegler fest.

Anschließend berechnet das Programm die Ausbreitung der Aschewolke und zeigt sie auf dem Bildschirm an. Mit „Start/ Pause” kann die Animation unterbrochen werden, „Stopp” beendet die Simulation. Mit dem Schieberegler unten rechts lässt sich der Zustand zu verschiedenen Zeitpunkten anzeigen.

Die Mathematik dahinter

Simulationen von komplexen physikalischen Vorgängen sind ein wichtiger Forschungsbereich in der angewandten Mathematik. Sie werden zum Beispiel für die Wettervorhersage benötigt oder für die Berechnung der Verbreitung von Schadstoffen in der Atmosphäre. Solche Vorgänge können von vielen unterschiedlichen Parametern beeinflusst werden.

Mathematikerinnen und Mathematiker beschreiben zunächst die Modelle dieser Vorgänge durch Systeme von Differentialgleichungen mit mehreren Variablen. Die Gleichungssysteme werden umso komplexer, je genauer man sich der Realität annähern möchte und je mehr Parameter dabei berücksichtigt werden. Sie anschließend am Computer mit mathematischen Algorithmen zu lösen ist eine anspruchsvolle Aufgabe. Häufig können die Lösungen nur näherungsweise bestimmt werden.

Für die Simulation der Ascheverbreitung in Dune Ash lautet die zu lösende partielle Differentialgleichung:

$$\partial_t c + \nabla \cdot (\omega\, c) - \varepsilon \Delta c = \upsilon(t, x)$$

$\partial_t c$ beschreibt die Veränderung der Aschekonzentration über die Zeit. Die Konzentration wird von mehreren Parametern beeinflusst. Der Ausdruck $\nabla \cdot (\omega\, c)$ steht für den Einfluss des Windes und $\varepsilon \Delta c$ für den Einfluss der Diffusion. Mit der Funktion $\upsilon(t, x)$ wird der Vulkanausbruch modelliert, der zu einem Zeitpunkt t und an einem Ort x stattfindet.

Danksagung

Dune Ash wurde am Institut für Mathematik der Universität Freiburg unter der Leitung von Prof. Dr. Dietmar Kröner entwickelt. Das Programm verwendet das modulare Programmpaket „Dune" zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen.

Für weitere Nachforschungen:

www.imaginary.org/program/dune-ash
www.dune-project.org

4b Die Zukunft der Gletscher

Die Alpengletscher schrumpfen seit mehr als einem Jahrhundert. Man erwartet, dass dieser Trend anhält, solange die globale Erwärmung fortschreitet. Doch wie kann man realistische Vorhersagen über die Entwicklung von Gletschern treffen? Der Film zeigt, wie Mathematiker mit Gletscherforschern zusammenarbeiten.

Danksagung

Der Film „Die Zukunft der Gletscher" wurde am Institut für Mathematik der Freien Universität Berlin von Dr. Guillaume Jouvet, Dr. Chantal Landry, Dr. Antonia Mey, Prof. Dr. Marco Picasso, Prof. Dr. Jaques Rappaz, Dr. Mathias Huss, Prof. Dr. Heinz Blatter und Prof. Dr. Martin Funk erstellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.imaginary.org/film/glacial-mystery

4c Mappae Mundi

Es ist nicht möglich, die Erdoberfläche ohne Verzerrungen auf eine ebene Weltkarte abzubilden. Das hat bereits Carl Friedrich Gauß bewiesen. Für die Kartographie bedeutet dies, dass es keine perfekten Karten geben kann. Man muss sich jeweils entscheiden, ob man für einen bestimmten Zweck eine winkeltreue, eine flächentreue oder eine längentreue Abbildung benötigt. In „Mappae Mundi" können Sie acht unterschiedliche Abbildungen erforschen und miteinander vergleichen.

Aktivitäten

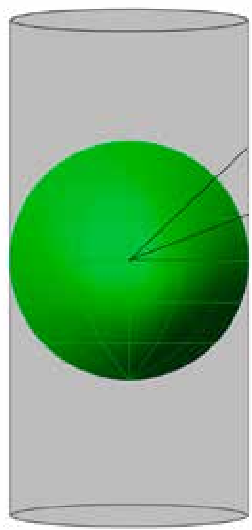
Öffnen Sie das Programm „Mappae Mundi", indem Sie es auf dem Bildschirm antippen. Wählen Sie im unteren rechten Bereich des Programms die verschiedenen Projektionen aus und betrachten Sie diese. Achten Sie auf den Flächeninhalt und den Umfang der einzelnen Kontinente. Was fällt Ihnen auf?

Im linken unteren Menü wählen sie die Art der Interaktion aus. Sie können die Karte drehen, sogenannte Verzerrungsellipsen einzeichnen oder Geodäten und Loxodrome einzeichnen. In Folge erklären wir Details zu den Verzerrungsellipsen: Wenn Sie mit dem Finger auf die Karte tippen, wird an diesem Punkt eine Ellipse angezeigt. Eine rote Färbung der Ellipse bedeutet eine starke Verzerrung an dieser Stelle. Eine grüne Färbung zeigt an, dass es kaum Abweichungen vom ursprünglichen Kreis gibt. Ist die Abbildung winkeltreu, dann sind alle Verzerrungsellipsen Kreise. Ist die Abbildung flächentreu, dann haben alle Verzerrungsellipsen den gleichen Flächeninhalt. Ist die Abbildung längentreu, dann haben alle Verzerrungsellipsen in

Richtung der Längentreue gleich lange Halbachsen. Meist sind Abbildungen nur entlang der Breiten- oder Längenkreise längentreu.

Die Mathematik dahinter

Für ebene und gekrümmte Oberflächen gelten unterschiedliche geometrische Gesetze. In der Ebene ist zum Beispiel die Winkelsumme in Dreiecken immer 180°. Ein Dreieck auf einer Kugeloberfläche (Sphäre) hat jedoch eine größere Winkelsumme. Wenn man versucht ein Dreieck von einer Kugeloberfläche auf eine Ebene abzubilden, muss man die Abstände der Ecken oder die Winkel im Dreieck verzerren.



Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Abbildungen entwickelt, die Abstände und Winkel auf unterschiedliche Weise verzerren. Betrachten Sie als Beispiel die Zylinderprojektion rechts, das Grundprinzip der Mercatorprojektion. Um den Globus der Erde wird gedanklich ein Zylinder gelegt. Der Zylinder berührt den Globus am Äquator. Vom Mittelpunkt des Globus aus zieht man nun gerade Linien durch jeden Punkt der Oberfläche. Dort wo die Linien auf den Zylinder treffen wird der entsprechende Punkt abgebildet. Zum Schluss wird der Zylinder aufgerollt und man erhält eine ebene Karte der Erdoberfläche. Am Äquator ist die Abbildung verzerrungsfrei, doch je weiter man sich davon entfernt, desto größer werden die Verzerrungen von Längen und Flächen.

Anstelle des Zylinders lassen sich auch andere Hilfskörper, wie z.B. Kegel verwenden. Daraus ergeben sich dann andere Abbildungen mit anderen Verzerrungseigenschaften.

Danksagung

Das Programm „Mappae Mundi" wurde von Dr. Daniel Ramos vom Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) entwickelt.

Für weitere Nachforschungen:

www.imaginary.org/program/mappae-mundi

4d Schmelzen der Eisdecken

Im Zuge der Erderwärmung steigt der Meeresspiegel aus verschiedenen Gründen. Eine große Rolle spielen auch die als Eisdecken bezeichneten Gletscher der Antarktis und Grönlands. Ist es möglich Veränderungen in der Eisdecke oder sogar das Kalben eines Gletschers vorherzusagen?

Aktivitäten

Dieses Modul zeigt Ihnen numerische Simulationen der Eisdecken-Dynamik. Es ist ähnlich wie ein interaktives Buch in 12 Kapitel untergliedert. Jedes Kapitel entspricht einer Seite, durch die Sie sich der Reihe nach klicken können. Auf der letzten Seite fordert ein kurzes Quiz Ihr Wissen heraus.

Die Mathematik dahinter

Physikalische Prozesse wie Schwerkraft, Druck und Fließgeschwindigkeit arbeiten in den Gletschern und fließen mit ihren Gleichungen in das mathematische Modell ein. Dieses Modell und konkrete Messungen, nämlich die Gletscherhöhe, sind Grundlage für den Algorithmus, um die Dynamik eines Gletschers und der gesamten Eisdecke zu beschreiben. Um daraus eine numerische Simulation für das Abschätzen der zukünftigen Veränderungen zu entwickeln nutzen die Mathematikerinnen und Mathematiker die Methode der räumlichen Diskretisierung: Anstatt mit einer Simulation die gesamte Eisdecke abzubilden, teilen sie den Eisschild in kleinere Einheiten ein. Das erhöht die Genauigkeit, denn so können zum Beispiel höhere Dynamiken am Rand des Eisfeldes berücksichtigt werden. Damit legen Sie ein kleinteiliges Netz über den Eisschild und können dessen räumliche Dynamik bei verschiedenen Szenarien über mehrere Jahrhunderte vorhersagen.

Danksagung

Die Autoren des Moduls sind Maëlle Nodet (Université Grenoble Alpes) and Jocelyne Erhel (Inria) unter Mitwirkung von Victoria Denys und unterstützt durch Interstices.

Für weitere Nachforschungen

imaginary.github.io/melting-ice-caps/#1

4e Power Grid Dynamics Simulation

Stromnetze sind ausgeklügelte und balancierte Systeme um Energie zu leiten und zu verteilen. Sie sind so angelegt, dass lokale Störungen schnell ausgeglichen werden und das Stromnetz mit einer gleichbleibenden Frequenz läuft. Mathematikerinnen und Mathematiker tragen zur Stabilität von Stromnetzen bei, indem sie Simulationen erstellen mit denen kritische Punkte im System identifiziert werden können.

Aktivitäten

Die Simulation zeigt das Stromübertragungsnetz Skandinaviens. Die Knotenpunkte repräsentieren Stromerzeuger oder -verbraucher, die Linien zwischen den Punkten Übertragungsleitungen. Auf der rechten Seite der Landkarte sind verschiedene Regler, um das Stromnetz zu beeinflussen. Mit den blauen Buttons kann die Simulation gestoppt, gestartet oder in einen stabilen Zustand („Reset") zurückgeführt werden. Klicken Sie „Random State", dann wählt das Programm die Phasenverschiebung und die Frequenz jedes Knotenpunkts zufällig aus. Sie können auch auf einen Knotenpunkt klicken und selbst die Größen wie Frequenz oder Dämpfung verändern. Schauen Sie anhand des Frequenzmessers rechts unten neben der Landkarte, wie schnell das Stromnetz die Störung ausgleicht. Schaffen Sie es, die Versorgung langfristig außer Gefecht zu setzen?

Die Mathematik dahinter

Anhand solcher Simulationen wollen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler herausfinden, welche Knotenpunkte in einem Stromnetz besonders anfällig sind und welche Art von Störungen das System nachhaltig destabilisieren. Hinter der Simulation steckt eine mathematische Formel, die sowohl die Kapazität von Übertragungsleitungen, die verbrauchten und eingespeisten Stromeinheiten als auch den Zustand jedes Knotenpunkts berücksichtigt. Letzterer setzt sich zusammen aus der Phasenverschiebung und der Frequenz, umgangssprachlich ausgedrückt, der Trittgeschwindigkeit der Stromweiterleitung. Bei einer Netzfrequenz von 50 Hertz, auf die auch die Wechselstromnetze in Europa eingestellt sind, läuft das Netz stabil. Ist die Frequenz zu niedrig, fehlt Strom – steigt die Frequenz zu sehr an, befindet sich zu viel Strom im Netz. Indem die Mathematikerinnen und Mathematiker nun Veränderungen an den Knotenpunkten simulieren, lassen sich nicht nur Schwächen von Systemen entdecken, sondern auch wertvolle Informationen über die zukünftige Gestaltung des Netzausbaus gewinnen. Diese fließen dann etwa in Netzausbau-Projekte der Energiewende ein.

Danksagung

Dieses Modul wurde von Frank Hellmann und Paul Schultz im Rahmen des vom BmBF unterstützten Projekt Condynet entwickelt.

Für weitere Nachforschungen

www.condynet.de/animation.html

5 Penrose Puzzle

Welche Form darf eine Fliese haben, damit man mit ihr auf regelmäßige Weise einen Fußboden lückenlos und überschneidungsfrei bedecken kann? Ein mathematischer Satz besagt, dass dies nur mit Grundformen gelingt, die eine 1-, 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Symmetrie besitzen. Mit dem Penrose Puzzle kann man jedoch eine Ebene mit einem Muster aus 5-zählig symmetrischen Figuren bedecken. Das Muster ist unregelmäßig und kann theoretisch unendlich fortgesetzt werden. Der besondere Trick: Es werden zwei unterschiedliche Grundelemente verwendet.

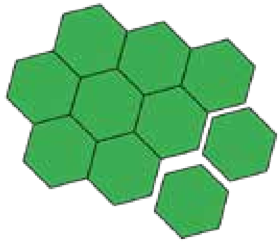
Aktivitäten

Legen Sie die Puzzleteile so aneinander, dass der Tisch lückenlos bedeckt wird. Aufgrund der Form des Tisches werden Sie keine perfekte Übereinstimmung mit dessen Rand erreichen. Die Aufgabe ist nicht ganz leicht, denn ein einmal erkanntes Muster kann nicht einfach wiederholt werden. Das fertige Puzzle zeigt ein unregelmäßiges Muster, in dem immer wieder symmetrische Figuren auftauchen.

Die Mathematik dahinter

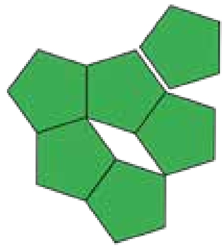
Mathematiker nennen eine lückenlose und überschneidungsfreie Bedeckung einer Ebene eine Parkettierung. Dabei wird das gleiche geometrische Grundelement – zum Beispiel ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck – periodisch, also regelmäßig und unendlich oft aneinander gelegt.

Ein mathematischer Satz besagt, dass eine Ebene nur mit 1-, 2-, 3-, 4- oder 6-zählig symmetrischen Grundelementen parkettiert werden kann. Die Zähligkeit einer symmetrischen Figur misst man daran, wie viele Spiegelungen und Drehungen es gibt, welche die Figur mit sich selbst zur Deckung bringen. Ein gleichseitiges Dreieck hat zum Beispiel eine 3-zählige Symmetrie: Man kann es dreimal um 120° drehen und es sieht nach jeder Drehung genau gleich aus. Ein gleichseitiges Fünfeck hat eine 5-zählige Symmetrie. Mit ihm wäre es nach dem genannten Satz nicht möglich, eine Ebene zu parkettieren.



Ein Ausschnitt einer Parkettierung der Ebene mit Sechsecken.

Umso erstaunter war die Fachwelt, als 1974 der Mathematiker Prof. Dr. Roger Penrose dennoch eine Parkettierung der Ebene mit 5-zählig symmetrischen Figuren fand. Ein besonderer Kniff machte das Unmögliche möglich: Penrose kombinierte zwei verschiedene Vierecke anstatt nur ein einziges Grundelement zu verwenden. Er konnte mathematisch beweisen, dass sich die Ebene mit den beiden Grundelementen theoretisch unendlich auffüllen lässt. Dabei entsteht ein aperiodisches Muster, in dem immer wieder Abschnitte mit einer 5-zähligen Symmetrie auftauchen. Mit unserem Puzzle können Sie einen Ausschnitt einer solchen Parkettierung nachbauen.



Beim Versuch einer Parkettierung mit gleichen Fünfecken entstehen Lücken.

Die Verbindung zur Kristallographie

Eine Parkettierung ist das zweidimensionale Gegenstück eines Kristalls. In den Atomgittern von Kristallen wiederholen sich die gleichen räumlichen Grundstrukturen immer wieder. Kennt man die Grundstruktur, so kann man damit den gesamten Aufbau eines Kristalls beschreiben. Sie können das an der Station 7 „Cinderella" genauer untersuchen.

Aufgrund des genannten mathematischen Satzes ging man in der Kristallographie lange Zeit davon aus, dass es keine 5-zählig symmetrischen Atomgitterstrukturen geben könne – trotz der Entdeckung von Penrose. Doch 1982 fand der Chemiker Prof. Dr. Dan Shechtman tatsächlich eine Legierung aus Aluminium und Magnesium, die eine solche Struktur aufweist. Er erhielt für seine Entdeckung 2011 den Nobelpreis für Chemie.

Heute sind Feststoffe mit dieser Struktur als Quasikristalle bekannt. Sie wurden inzwischen vielfach erforscht. In der Praxis dienen sie unter anderem dazu, eine besondere Sorte von Stahl herzustellen, denn sie sind besonders hart und spröde.

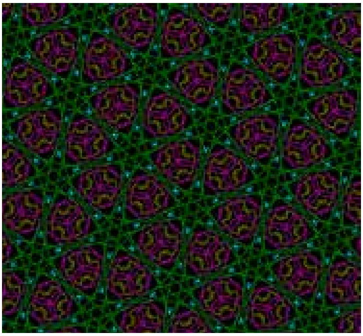
Danksagung

Das Penrose-Puzzle wurde vom Mathematikum Gießen gebaut und dem MiMa zur Verfügung gestellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-penrose

6 iOrnaments

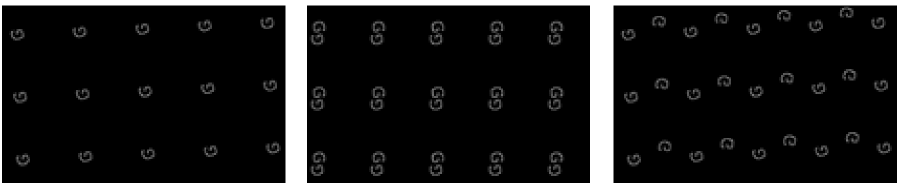


Mit dem Programm iOrnaments können Sie mit einem selbst gemalten Grundmuster die Ebene parkettieren, das heißt lückenlos und überschneidungsfrei ausfüllen. Sie erzeugen dadurch wunderschöne Ornamente, hinter denen eine ganze Menge Mathematik steckt!

Aktivitäten

Wählen Sie rechts oben aus der Palette eine Farbe. Mit den Schiebereglern können Sie Eigenschaften wie Strichstärke, Transparenz oder Farbsättigung einstellen. Malen Sie mit dem Finger auf die schwarze Zeichenfläche und beobachten Sie, wie das von Ihnen gemalte Grundmuster automatisch die Ebene füllt.

Es gibt nur 17 verschiedene Möglichkeiten, wie aus Ihrem Grundmuster ein Ornament entstehen kann. Auf der rechten Seite, unterhalb der Schieberegler, können Sie auswählen, welche von den 17 Möglichkeiten angewendet wird. Im einfachsten Fall, mit der ersten Schaltfläche, wird das Grundmuster einfach nur verschoben. Mit der zweiten Schaltfläche daneben



Variationen mit dem gleichen Grundmuster: Verschiebung, halbe Drehung sowie eine Kombination aus Verschiebung und Drehung.

vollführt es eine halbe Drehung. Beobachten Sie was passiert, wenn Sie die anderen Schaltflächen drücken. Es entstehen immer komplexere Muster durch Kombinationen aus Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen des Grundmusters.

Das Ornament kann theoretisch unendlich weit fortgesetzt werden, indem ein bestimmter Ausschnitt, eine „Kachel", immer wieder verschoben und aneinandergelegt wird. Sie können sich Ihre spezielle „Kachel" und auch das dem Ornament zugrundeliegende Raster mit den Schaltflächen ganz unten im Menü anzeigen lassen. Dort können Sie auch Malvorgänge rückgängig machen oder das ganze Bild löschen und von vorne beginnen.

Die Mathematik dahinter

Ornamente sind für die Mathematik interessant, weil sie hochsymmetrische Gebilde sind. Im alltäglichen Sprachgebrauch wird der Begriff Symmetrie häufig mit der Achsensymmetrie oder auch Spiegelsymmetrie gleichgesetzt. In der Mathematik werden jedoch auch Drehungen und Verschiebungen als Symmetrieoperationen betrachtet. Der berühmte Mathematiker Prof. Dr. Hermann Weyl erklärte Symmetrie folgendermaßen: „Symmetrisch ist ein Gebilde dann, wenn man es irgendwie verändern kann und im Ergebnis das Gleiche erhält."

Schauen sie noch einmal die Kachel an, die Ihr Grundmuster in verschiedenen gedrehten oder gespiegelten Versionen enthält. Wie viele Möglichkeiten haben Sie, diese Kachel durch Drehungen oder Spiegelungen in sich selbst zu überführen? Vielleicht sehen Sie eine oder mehrere Spiegelachsen oder einen Punkt, um den Sie die Kachel in mehreren Schritten drehen könnten.

Die Menge all der Operationen, welche die Kachel in sich selbst überführen, nennt man in der Mathematik eine Symmetriegruppe.

Mathematisch lässt sich beweisen, dass es genau 17 verschiedene Symmetriegruppen von periodischen Mustern oder Parkettierungen der Ebene gibt. Das bedeutet, dass jedes regelmäßige Flächenornament genau zu einem der 17 verschiedenen Grundmuster gehört.

Die Araber kannten diese Symmetriegruppen bereits im Mittelalter. In der Alhambra, einer Festungsanlage in der spanischen Stadt Granada, findet man sie alle in den arabischen Wandornamenten wieder.

Die Verbindung zur Kristallographie

Die 17 Symmetriegruppen von periodischen Mustern bezeichnet man auch als zweidimensionale kristallographische Gruppen. In jeder Schnittfläche eines Kristalls folgen die Atome den Anordnungsregeln einer dieser 17 Gruppen. Betrachtet man nicht nur die Schnittflächen, sondern ganze, dreidimensionale Kristalle, wird es komplizierter. Denn für dreidimensionale regelmäßige Muster gibt es 230 kristallographische Raumgruppen.

Danksagung

„iOrnaments" wurde von Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert entwickelt und dem MiMa zur Verfügung gestellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.science-to-touch.com/en/iOrnament.html

7 Mathematik und Mineralien

An dieser Station finden Sie eine Sammlung von Programmen, mit denen Sie verschiedene Experimente zur Kristallographie durchführen können.

7a Kristallflüge

Fliegen Sie durch virtuelle Atomgitter von Kristallen und durch vierdimensionale Räume. Als wären Sie ein Pilot in einem Nano-Jet können Sie dadurch den Aufbau der Gitter von innen erkunden.

Aktivitäten

Wählen Sie einen von mehreren 3D-Flügen aus. Drei der vorhandenen Flüge bilden die atomare Struktur von Kristallen ab: Fluorit, Quartz und Diamant. Tippen Sie auf eines der Symbole, setzen Sie eine 3D-Brille auf und schon geht's los.

Der Hebel rechts unten erlaubt es Ihnen, die Geschwindigkeit des Flugs einzustellen. Die Flugrichtung können sie beeinflussen, indem Sie mit der Hand über die Projektionsfläche fahren. Mit dem „X"-Knopf können Sie die Flüge wieder schließen und gelangen zurück in das Hauptmenü.

Natürlich sehen die Atome in Wirklichkeit nicht wie farbige Kugeln aus, die mit Stäben verbunden sind. Das ist nur ein einfaches Modell. Dadurch ist jedoch gut zu erkennen, dass die Atome in einer gitterartigen Struktur angeordnet sind und sich ihre Anordnung in einer konstanten Richtung permanent wiederholt. Durch verschiedene Flugrichtungen können Sie auch gut die Symmetrieebenen der Kristalle erforschen.

Der vierte Flug ist eine mathematische Besonderheit. Es handelt sich um einen vierdimensionalen Raum aus 120 dreidimensionalen Dodekaedern. Der Raum ist in sich geschlossen, das heißt, er hat keinen Rand. Wenn man an einem Ende hinausfliegt, kommt man automatisch an der gegenüberliegenden Seite wieder hinein. Man kann sich das ähnlich vorstellen, wie wenn man auf einer Kugeloberfläche immer in eine Richtung geht: Irgendwann kommt man automatisch wieder zur selben Stelle.

Danksagung

Die Kristallflüge wurden von Dr. Jeff Weeks speziell für das MiMa geplant und programmiert. Sie basieren auf seinem freien Programm Crystal Flight, das im Internet kostenlos erhältlich ist.

Für weitere Nachforschungen

www.geometrygames.org

7b Polyeder

Polyeder sind Körper, die ausschließlich von geraden Flächen begrenzt sind. Sie sind für die Kristallographie wichtig, weil Kristallformen häufig Polyeder bilden.

Im Programm **Platonische Körper** lernen Sie fünf ganz besondere Polyeder näher kennen. Platonische Körper sind vollkommen regelmäßige, konvexe Körper, deren Oberflächen aus gleich großen, gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecken bestehen. In jeder Ecke trifft die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. Das Programm ermöglicht Ihnen, die Körper ineinander zu schachteln. Der Innerste und der Äußerste können jeweils wieder entfernt werden. Welche Beziehungen zwischen den Körpern können Sie dadurch erkennen?

Das Programm **Polyeder basteln** ermöglicht es Ihnen, ausgehend von den Platonischen Körpern, neue Polyeder zu erzeugen. Schneiden Sie beispielsweise virtuell die Ecken ab oder ziehen Sie die Flächenmittelpunkte heraus. Durch Antippen des Zauberstabs übernehmen Sie das aktuelle Objekt als neuen Ausgangspunkt für die Verformungen.

Auch im Programm **Auffaltung** geht es um Platonische Körper. Hier können Sie sich anschauen, wie ein Faltbogen des jeweiligen Körpers aussehen müsste.

Im Programm **Archimedische Körper** lernen Sie eine weitere Klasse besonderer Polyeder kennen. Sie bestehen aus unterschiedlichen gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecken. In jeder Ecke trifft die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. In diesem Programm können Sie sich anschauen, wie aus einem platonischen Körper ein archimedischer Körper geformt werden kann.

7c Kristallstrukturen

Mit bestimmten Körpern kann man allein durch verschobene Kopien den dreidimensionalen Raum nahtlos ausfüllen. Man nennt solche Körper Packungspolytope. Im Programm **Kristallpackungen** kann man dies für fünf wichtige Repräsentanten ausprobieren. Die gewonnenen Strukturen bilden die Grundlage für die Atomanordnungen in Kristallen.

Im Programm **Kristallfraktale** können Sie großräumige Strukturen mit fraktalen Eigenschaften erzeugen. Dabei werden an die Ecken eines Körpers verkleinerte Kopien des gleichen Körpers gesetzt. Fährt man iterativ fort, ergeben sich je nach Ausgangskörper verschiedene Strukturen. Im Falle des Tetraeders entsteht ein sehr bekanntes Fraktal: das Sierpinski Tetraeder.

Ein wesentliches Element zum Verständnis von Kristallwachstum ist die Richtung der möglichen Begrenzungsebenen. Bedingt durch die Anordnung der Atome im Kristallgitter bilden sich bevorzugt Richtungen aus, die bezüglich der Gitterstruktur symmetrisch liegen. Bei kubischen Kristallgittern sind dies bevorzugt die Facettenrichtungen von Würfeln, Oktaedern oder Rhombododekaedern. Schneidet man diese Körper, so erhält man sehr realistische Kristallformen. Dies können Sie im Programm **Durchschnitte** genauer betrachten.

Im Programm **Kristallbetrachter** können Sie für einige ausgewählte Kristallsymmetrietypen durch Abschleifen von Facetten realistisch aussehende Kristallformen erzeugen.

7d Atomgitter

Von besonderer mathematischer Bedeutung ist die Struktur des „Orangenstapels im Supermarkt". Sie ist die Kugelpackung mit der beweisbar höchsten Dichte. Nicht zufällig kommt sie oftmals als Atomanordnung in kristallinen Strukturen vor. Im Programm **Kugelpackung** kann man diese Packung betrachten, sowie einige Teilstrukturen sichtbar machen.

Die Atome in Kristallgittern haben sehr reguläre Anordnungen. Im Programm **Atomgitter** kann man einige dieser typischen Gitterstrukturen betrachten und untersuchen.

7e Strukturbildung

In Mineralien findet man oftmals Einschlüsse einer Substanz in einem Stein, die wie kleine „Bäumchen" aussehen. Das Wachstum solcher Strukturen kann man durch Diffusion und Anlagerungsprozesse erklären. Im Programm **Teilchen** wird beispielhaft ein sehr einfacher Prozess dargestellt. Ein Teilchen bewegt sich zufällig durch die Ebene. Trifft es auf einen Kristallisationskeim, so lagert es sich an und das nächste Teilchen startet. Am Slider „Attraktion" kann man eine Anziehung des freien Teilchens in Richtung Bildmitte einstellen.

7f Die vierte Dimension

In der Mathematik denkt man häufig in mehr als drei Dimensionen. Im Programm **Hyperwürfel** kann man sehen, wie ein vierdimensionaler Würfel aufgebaut wird. Der Schieberegler „Dimension" demonstriert dabei den schrittweisen Aufbau beginnend bei Dimension 0. Der vierdimensionale Hyperwürfel besitzt 16 Eckpunkte, 32 Kanten, 24 Seitenflächen und 8 Seitenräume. Die mit Buchstaben bezeichneten Punkte sind bewegbar.

Im vierdimensionalen Raum gibt es analog zu den dreidimensionalen platonischen Körpern insgesamt sechs hochsymmetrische reguläre Körper. Die Seitenflächen dieser Körper sind selbst wieder platonische Körper. Im Programm **Rotationen in 4D** kann man eine dreidimensionale Projektion dieser Körper beobachten. Die kleinen runden Schieberegler erlauben die Rotation um sechs vierdimensionale Drehachsen. Über die Projektionsart kann man einstellen ob die Projektion vom Vierdimensionalen ins Dreidimensionale eine Parallelprojektion oder eine Zentralprojektion sein soll.

Um ein Gefühl für den Übergang zwischen Dimensionen zu bekommen, kann man sich im Programm **Ebenenschnitt** zunächst zweidimensionale Schnitte durch dreidimensionale platonische Körper ansehen. Die Schnittebene kann am großen Schieberegler verstellt werden. Es kann ausgewählt werden, ob der Schnitt von einer Ecke, Kante oder Fläche ausgehend durchgeführt wird. Das Programm **4D Raumschnitt** ermöglicht schließlich dreidimensionale Schnitte durch vierdimensionale reguläre Körper.

Danksagung

Die Programme wurden von Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert speziell für das MiMa entworfen und mit Cinderella programmiert. Cinderella ist ein Programm für mathematische Experimente von Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert und Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp.

8 Skulpturen

In der Vitrine finden Sie 3D-Drucke platonischer, archimedischer und catalanischer Körper – dreidimensionale symmetrische Figuren, die für die Kristallographie eine wichtige Rolle spielen. Außerdem zeigen wir Ihnen platonische Sterne sowie einige ausgewählte mathematische Objekte aus Glas: das Möbiusband, die Kleinsche Fläche und eine Interpretation der Boyschen Fläche. Auf der untersten Ebene finden Sie zusätzlich die Projektion eines vierdimensionalen Dodekaeders in den dreidimensionalen Raum.

Platonische Körper

Platonische Körper sind vollkommen regelmäßige, konvexe Körper, deren Oberflächen aus gleich großen, gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecken bestehen. In jeder Ecke trifft die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. Von diesen Körpern gibt es nur fünf verschiedene: Tetraeder, Hexaeder (Würfel, Kubus), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Ihre Eigenschaften wurden bereits in der Antike studiert. Der griechische Philosoph Platon, nach dem die Körper benannt sind, beschrieb sie ausführlich in seinem Werk *Timaios*.

In der Kristallographie spielen die platonischen Körper eine wichtige Rolle, weil die Kristalle einiger Mineralien exakte Hexaeder oder Oktaeder bilden oder fast exakte Tetraeder und Dodekaeder.

Archimedische Körper

Die Oberflächen der 13 archimedischen Körper bestehen aus unterschiedlichen gleichseitigen und gleichwinkligen Vielecken. In jeder Ecke trifft die gleiche Anzahl von Vielecken zusammen. Archimedische Körper können zum Beispiel aus den platonischen Körpern konstruiert werden, indem man die Ecken der platonischen Körper so abschneidet, dass an jeder Ecke ein regelmäßiges Vieleck entsteht. In der Natur treten viele archimedische Körper ebenfalls als Kristallformen auf.

Ein ganz bestimmter archimedischer Körper ist Ihnen wahrscheinlich bereits bekannt: Will ein Schuster einen Fußball nähen, so nimmt er dazu zwölf regelmäßige Fünfecke und zwanzig regelmäßige Sechsecke. An drei der Kanten eines Sechsecks näht er ein anderes Sechseck, an den anderen drei Kanten nimmt er statt dessen jeweils ein Fünfeck. Mathematisch nennt man das einen Ikosaederstumpf. Wenn man von einem Ikosaeder die Ecken abschneidet, ensteht genau diese Form. Probieren Sie es an der Station „Mathematik und Mineralien" mit dem Programm „Polyeder basteln" selbst aus!

Catalanische Körper

Nimmt man die Mittelpunkte von den Seitenflächen der archimedischen Körper und verbindet sie, dann erhält man jeweils einen catalanischen oder *dual-archimedischen* Körper. Alle

Seitenflächen der catalanischen Körper sind deckungsgleich zueinander, aber sie sind nicht regelmäßig. Ihre Seitenlängen sind unterschiedlich. Es verhält sich also genau umgekehrt wie bei den archimedischen Körpern.

Auch die catalanischen Körper sind sehr wichtig für die Kristallographie. Das Rhombendodekaeder ist zum Beispiel eine typische Kristallform. Sie kommt bei Mineralien der Granatgruppe vor.

Platonische Sterne

Mathematiker der Universität Wien berechneten die Formeln von algebraischen Flächen mit dem passenden Namen „Platonische Sterne". Besondere Spitzen, bei Mathematikern unter dem Namen A_2-Singularität bekannt, kommen in ihnen jeweils genau in den Ecken eines platonischen Körpers zu liegen. Der Hexaederstern hat also, wie der Würfel, acht Spitzen. Und wie den Würfel kann man ihn auf 24 verschiedene Arten drehen, ohne dass Ausgangslage und Ergebnis voneinander unterscheidbar sind. Platonische Sterne gehorchen damit denselben Regeln der Symmetrie wie die platonischen Körper.

Glasobjekte

Bei den Glasobjekten handelt es sich um besondere Flächen. Die ersten beiden sind nicht orientierbare Flächen, das heißt, sie besitzen nur eine Seite. Beginnt man an einem beliebigen Punkt und fährt mit dem Finger über die Fläche, so gelangt man ohne Übergang von „innen" nach „außen" und umgekehrt.

Das **Möbiusband** ist wahrscheinlich die bekannteste der drei ausgestellten Flächen. Es wurde nach dem deutschen Mathematiker und Astronom August Ferdinand Möbius (1790-1868) benannt. Sie können ein Möbiusband leicht selbst herstellen, indem Sie einen Papierstreifen ringförmig zusammenkleben und vorher ein Ende um 180° drehen.

Die **Kleinsche Fläche** erinnert an die Form einer Flasche, bei der der Flaschenhals an einer Stelle die Flasche durchdringt. Sie ist nach dem deutschen Mathematiker Felix Klein (1849-1925) benannt. Wie würde es wohl aussehen, wenn Sie in diese Flasche Wasser füllen würden?

Die dritte Fläche ist eine **Fläche vom Geschlecht 3**. Man bezeichnet sie so, weil sie drei „Henkel" hat. Es handelt sich um die Verschmelzung dreier Torusflächen.

Danksagung

Die platonischen Körper wurden von der Augsburger Firma Voxeljet Technology dreidimensional aus Kunststoff ausgedruckt. Die archimedischen und catalanischen Körper wurden von Dr. Oliver Labs erstellt. Die Idee zu den platonischen Sternen stammt von Prof. Dr. Herwig Hauser und seinem Team an der Universität Wien. Die Gleichungen wurden unter anderen von Alexandra Fritz, einer österreichischen Mathematikerin, gefunden. Die 3D-Daten hat das Institut Forwiss der Universität Passau für das MiMa erstellt. Die Skulpturen wurden schließlich von der Firma Voxeljet Technology gedruckt. Die Glasobjekte wurden von der Firma Dorotheenhütte – Glashütte Wolfach für das MiMa erstellt. Die Tafel „Polyederfamilie" wurde von Allison Y Chen erstellt.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-skulpturen

9 Doppelpendel

Sie glauben zu wissen, wie sich ein Pendel verhält? Unser Doppelpendel stellt alles auf den Kopf. Es vollführt die aberwitzigsten Bewegungen, deren genauer Ablauf nicht vorhersagbar ist. Die Untersuchung solcher Phänomene ist in der Mathematik als „Chaosforschung" in die Geschichte eingegangen.

Aktivitäten

Bringen Sie das Doppelpendel mit dem Drehknopf in der Mitte zum Schwingen und beobachten Sie was passiert. Experimentieren Sie zunächst mit unterschiedlichen Ausgangsbedingungen. Versuchen Sie zweimal hintereinander mit den gleichen Bedingungen zu starten. Wie verhält sich das Pendel?

Die Mathematik dahinter

In der Schule lernt man vor allem solche mechanische oder elektrische Systeme kennen, die ein einfaches Schwingungsverhalten aufweisen, wie zum Beispiel ein einfaches Pendel. Seine Bewegung kann man leicht vorhersagen: Es pendelt hin und her und irgendwann hört es wieder damit auf. Wenn man den Luftwiderstand, die Reibungskräfte und andere beeinflussende Größen kennt, kann man den genauen Bewegungsablauf mit Hilfe einer gedämpften Sinusschwingung mathematisch beschreiben und die Höhe der Ausschläge sowie die Dauer des Pendelvorgangs berechnen.

Für unser Doppelpendel gilt das nicht. Zwar lässt sich der Bewegungsablauf durch ein System von Differentialgleichungen mathematisch beschreiben, aber dieses Gleichungssystem kann nur näherungsweise für bestimmte Ausgangswerte gelöst werden. Es gibt keine Möglichkeit, die Bewegung bei beliebigen Startbedingungen längerfristig vorherzusagen. Minimale Änderungen können gewaltige Unterschiede auslösen. Das liegt daran, dass sich die beiden Pendel in ihren Bewegungen gegenseitig beeinflussen und kleine Abweichungen exponentiell verstärkt werden können.

Systeme mit solchem Verhalten werden als „chaotische" Systeme bezeichnet. Im Gegensatz zur Verwendung in der Umgangssprache bedeutet „chaotisch" in der Mathematik nicht die Abwesenheit jeglicher Ordnung. Chaotische Systeme sind mathematisch beschreibbar und verhalten sich prinzipiell deterministisch, das heißt, sie werden nicht vom Zufall bestimmt. Es ist in der Praxis jedoch unglaublich schwierig, zweimal das gleiche Ergebnis zu erzielen oder ein längerfristiges Ergebnis vorherzusagen, weil diese Systeme so empfindlich auf winzige Änderungen reagieren.

In der Natur kommen chaotische Systeme häufig vor, z.B. in der Metereologie (Wettervorhersage), Astronomie (Dreikörperproblem) und Medizin (Herzschlagarrythmien). Sie kennen bestimmt die Metapher vom Schmetterling, der mit seinem Flügelschlag am Bodensee einen Wirbelsturm in Australien auslösen kann. In Anlehnung daran spricht man auch vom Schmetterlingseffekt: Kleinste Veränderungen der Startbedingungen führen zur gewaltigen Änderungen des Ergebnisses. Die mathematische Untersuchung solcher Systeme ist ein schwieriges und aktives Forschungsgebiet.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-doppelpendel

Danksagung

Dieses Exponat wurde von der Firma A2 Metallbau Armbruster in Oberwolfach geplant, designed, gebaut und dem MiMa gesponsert.

10 SURFER

Mit SURFER erleben Sie den Zusammenhang zwischen Formeln und Formen. Aus einfachen Gleichungen entstehen Bilder, algebraische Flächen im dreidimensionalen Raum. Mathematisch gesprochen ist SURFER ein Programm zur Visualisierung reeller algebraischer Geometrie. Die Flächen stellen die reellen Lösungen polynomialer Gleichungen mit drei Variablen dar.

$x^2+y^2-z^2=0$

$x^3+x^2z^2-y^2=0$

Aktivitäten

Geben Sie unten ein Polynom mit drei Variablen x, y und z ein. Die Variablen dürfen addiert und multipliziert werden. Auch Klammern dürfen nach den Regeln der Mathematik gesetzt werden. Exponenten können Sie mit Hilfe des Zeichens ^ ausdrücken (schreiben Sie zum Beispiel x^2 für x^2).

Falls Ihre Eingabe kein gültiges Polynom darstellt erscheint daneben ein rotes Ausrufezeichen. Nicht erlaubt sind zum Beispiel „nicht-algebraische" Ausdrücke der Form 2^x, logarithmische oder trigonometrische Funktionen.

SURFER berechnet die zu Ihrem Polynom gehörende Fläche und zeigt sie auf dem Bildschirm an. Indem Sie mit dem Finger darüber fahren, können Sie die Fläche drehen und von allen Seiten betrachten. Da sich solche Flächen häufig bis ins Unendliche ausdehnen, zeigt SURFER nur einen bestimmten, kugelförmigen Ausschnitt der Fläche an. Mit dem Zoom-Balken am rechten Rand des Anzeigefensters können Sie diesen Ausschnitt vergrößern und verkleinern. Mit Hilfe des Menüpunkts „Farben" können Sie der Außen- und Innenseite der Fläche verschiedene Farben zuweisen.

Welche Formel passt dazu? Dieser Löffel wurde 2008 von Valentina Galata mit Hilfe von SURFER erzeugt.

Bei der Eingabe der Gleichung können Sie bis zu vier Parameter a, b, c und d verwenden (z.B. $ax^2+by^2-3z^2$). Es erscheint dann für jeden Parameter ein Schiebebalken, mit dem Sie den Wert des Parameters verändern können.

Unter dem Menüpunkt „Start" finden Sie eine große Auswahl an Flächen, die Sie betrachten oder als Ausgangspunkt für eigene Flächen verwenden können. Für viele Flächen gibt es unter dem Menüpunkt „Info" zusätzliche Informationen.

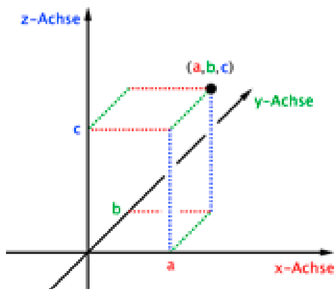
Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Polynomen. Untersuchen Sie, welche Änderungen des Polynoms bestimmte Änderungen in der Fläche bewirken. Oder überlegen Sie sich vorher, was für ein Bild Sie erzeugen möchten und versuchen Sie das passende Polynom dazu einzugeben.

Die Mathematik dahinter

Die algebraische Geometrie befasst sich mit dem Wechselspiel zwischen der Algebra, also den Formeln, und der Geometrie, den dazugehörigen Formen.

Eine Formel ist hier nichts anderes als eine polynomiale Gleichung mit den drei Variablen x, y, und z, zum Beispiel $x^2+y^2-z^2=0$. Polynomial bedeutet, dass auf der linken Seite der Gleichung ein Polynom steht. Ein Polynom ist eine Summe aus Vielfachen von Potenzen von Variablen, wobei die Exponenten natürliche Zahlen sind.

Die Lösungen der Gleichung $x^2+y^2-z^2 = 0$ sind alle Tripel (x, y, z) von Zahlen, für die die linke Seite der Gleichung 0 ergibt. Das Tripel (3, 4, 5) ist zum Beispiel eine Lösung der Gleichung, denn $3^2+4^2-5^2 = 0$. Man sagt (3, 4, 5) ist eine „Nullstelle" des Polynoms $x^2+y^2-z^2$.



Solche Tripel von Zahlen können als Koordinaten von Punkten im dreidimensionalen Raum aufgefasst werden. Durch die Wahl von drei senkrecht aufeinanderstehenden Koordinatenachsen werden ein Ursprung 0 sowie drei Richtungen x, y und z festgelegt. Jeder Punkt im dreidimensionalen Raum wird nun eindeutig durch die Angabe von drei Zahlen für x, y und z bestimmt.

Mit dieser Überlegung lassen sich die Lösungen von Gleichungen mit drei Variablen als Punkte im Raum darstellen. Lässt man als mögliche Lösungen alle Tripel aus reellen Zahlen zu, so ergeben alle Lösungen oder Punkte gemeinsam eine zusammenhängende Fläche. Eine algebraische Fläche visualisiert also die reelle Lösungsmenge einer polynomialen Gleichung mit drei Variablen.

Die algraische Geometrie kann noch viel mehr als schöne visuelle Gebilde zu erzeugen. Die Idee, algebraische Probleme geometrisch zu betrachten und umgekehrt hilft in vielen Gebieten der Mathematik bei der Beantwortung wichtiger Fragestellungen. Eines der berühmtesten Probleme der Mathematik, der Beweis des großen Fermatschen Satzes aus dem 17. Jahrhundert, wurde 1993/1994 von Andrew Wiles mit Methoden der abstrakten algebraischen Geometrie gelöst. Zuvor hatte unter anderem Alexander Grothendieck auf diesem Gebiet entscheidende Fortschritte erzielt. Weitere Anwendungen der algebraischen Geometrie finden sich in der Computergrafik und in der theoretischen Physik.

Für weitere Nachforschungen:

www.mima.museum/mathematik-surfer

Danksagung

SURFER ist ein Projekt des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach und der Technischen Universität Kaiserslautern. Es basiert auf dem Program Surf von Dr. Stephan Endrass und anderen (surf.sourceforge.net). SURFER wurde unter der Leitung von Prof. Dr. Dr. Gert-Martin Greuel von Dr. Andreas Daniel Matt, Dr. Henning Meyer, Dr. Christian Stussak, Dr. Oliver Labs, Prof. Dr. Herwig Hauser und Felix Riemann erstellt.

11 Bildergalerie

Genießen Sie auf der Galerie eine Auswahl der besten Bilder der Wanderausstellung IMAGINARY, die von verschiedenen Mathematikern und Visualisierungskünstlern erstellt wurden.

Dr. Aurélien Alvarez forscht an der Université d'Orléans. Sein Interesse liegt vor allem in der Geometrie. Seine Hauptforschungsthemen sind ergodische und geometrische Gruppentheorie. Zusammen mit Étienne Ghys und Jos Leys arbeitete er an der Realisierung von „Dimensions", einem Film über Dimensionen, von der stereografischen Projektion und dem Polyeder im vierdimensionalen Raum bis zu den komplexen Zahlen und der Hopfschen Faserung.

Luc Benard, ein Kanadier aus Montreal, arbeitete als Filmtechniker, Kameramann, Audio-Ingenieur und ist im Moment im Videoschnitt tätig. Mit der zunehmenden Entwicklung der Computer begann er Fraktale als Ausgangspunkt für sein visuelles Schaffen zu verwenden. In den letzten Jahren arbeitete er mit 3D-Bildern und versuchte Wissenschaft und Kunst in seinen visuellen Kompositionen zu vereinen.

Prof. Dr. Étienne Ghys ist Direktor des CNRS (Centre Nationale de la Recherche Scientifique) und arbeitet am Institut für Mathematik der École Normale Supérieure in Lyon. Er hielt den Eröffnungsvortrag zum Thema „Knoten und Dynamik" beim Internationalen Mathematik Kongress in Madrid 2006. Bilder dieses Vortrages wurden gemeinsam mit Jos Leys erstellt. Leys, Alvarez und Ghys arbeiteten außerdem gemeinsam an einer Serie von DVDs zur mathematischen Visualisierung. Teile der ersten DVD (Film Dimensions) und Bilder daraus sind bei IMAGINARY zu sehen.

Prof. Dr. Herwig Hauser ist Professor für algebraische Geometrie und Singularitätentheorie am Institut für Mathematik der Universität Wien. Er arbeitet seit Jahren an Visualisierungen, Filmen und Büchern für ein breites Publikum. Gemeinsam mit seiner Gruppe veranstaltete er Ausstellungen und Vorträge zur algebraischen Visualisierung, u.a. wurde sein Film Zero Set beim Internationalen Mathematik Kongress 2006 in Madrid gezeigt.

Dr. Oliver Labs ist Mathematiker an der Universität des Saarlandes. Seine Forschungsschwerpunkte sind die algorithmische algebraische Geometrie und Singularitätentheorie, sowie deren Anwendungen. Insbesondere beschäftigt sich Oliver Labs seit Jahren mit der Konstruktion und Visualisierung singulärer algebraischer Flächen. Er hat gemeinsam mit Coautoren bereits mehrere Computerprogramme zu diesem Thema entwickelt, z.B. Surfex und Surfer.

Jos Leys ist Diplom-Ingenieur. Er hatte schon immer großes Interesse an der Mathematik. Seine Leidenschaft gilt vor allem der Erstellung mathematischer Bilder. Er koordiniert unter anderem die Webseite „Mathematical Imagery“, www.josleys.com, und gewann damit verschiedene Preise.

Prof. Dr. Richard Palais, Professor Emeritus der Brandeis Universität, ist ein bekannter Mathematiker und begann früh, im Gebiet der mathematischen Visualisierung zu arbeiten. Er leitet ein internationales Team, das 3DXM Konsortium, und ist Chef-Architekt und Programmierer der Software 3D-XplorMath. Zur Zeit ist er am Institut für Mathematik der Universität Irvine in Kalifornien tätig und arbeitet zusammen mit Luc Benard und anderen Mitgliedern des Konsortiums an der Erstellung eines virtuellen Mathematik Museums.

Prof. Dr. Ulrich Pinkall studierte Mathematik an der Universität Freiburg, wo er 1982 promovierte. Seit 1986 ist er Professor für Differentialgeometrie und Visualisierung an der TU Berlin. Er war von 1992 bis 2003 Sprecher des Sonderforschungsbereichs „Differentialgeometrie und Quantenphysik". Seit 2004 leitet er zusammen mit John Sullivan die Arbeitsgruppe „Mathematische Visualisierung" an der TU Berlin, die auch Teil des DFG Forschungszentrums Matheon ist.

Uli Gaenshirt ist selbständiger Bildhauer in Nürnberg. Er beschäftigt sich mit mathematischen Strukturen in der Kunst, seit 2001 insbesondere mit der Mathematik aperiodischer Systeme und quasikristalliner Strukturen. Erste Ausstellungen führte er in den Jahren 2008 bis 2011 in Zusammenarbeit mit dem KOMM-Bildungsbereich in Nürnberg durch. Seine hier gezeigten Ornamente schaffen auf künstlerische Weise einen Zugang zur besonderen Geometrie der Quasikristalle.

Herausgegeben von:

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Schwarzwaldstr. 9-11
77709 Oberwolfach

+49 (0) 7834 979 0

www.mfo.de
www.mima.museum

November 2021

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Mitglied der
Leibniz
Leibniz
Gemeinschaft

in Zusammenarbeit mit

IMAGINARY
open mathematics